Оглавление

[1. Мера в – мерном пространстве. Кратный интеграл 3](#_Toc376102790)

[2. Двойной интеграл и его свойства 4](#_Toc376102793)

[3. Вычисление двойного интеграла. Формула Дирихле 5](#_Toc376102796)

[4. Тройной интеграл и его вычисление 7](#_Toc376102801)

[5. Замена переменной в двойном интеграле 8](#_Toc376102803)

[6. Якобиан в полярных, цилиндрических и сферических координатах 9](#_Toc376102807)

[7. Площадь поверхности 10](#_Toc376102809)

[8. Криволинейный интеграл 1 рода и его свойства. Вычисление 11](#_Toc376102810)

[9. Криволинейный интеграл 2 рода и его свойства. Вычисление 12](#_Toc376102813)

[10. Независимость криволинейного интегрирования от контура интегрирования 14](#_Toc376102816)

[11. Формула Грина для односвязной и многосвязной областей 15](#_Toc376102817)

[12. Следствия из формулы Грина 16](#_Toc376102820)

[13. Несобственные двойные интегралы. Интеграл Пуассона 16](#_Toc376102821)

[14. Поверхностные интегралы 1 и 2 рода 17](#_Toc376102822)

[15. Скалярные и векторные поля. Свойства дивергенции, ротора, градиента. Оператор Набла 18](#_Toc376102827)

[16. Поток векторного поля. Дивергенция. Соленоидальные поля. Формула Гаусса-Остроградского 19](#_Toc376102830)

[17. Циркуляция векторного поля. Потенциальные поля. Ротор. Формула   
Стокса 20](#_Toc376102833)

[18. Числовой ряд. Необходимое условие сходимости ряда. Гармонический ряд. Критерий Коши. 21](#_Toc376102836)

[19. Признаки сравнения знакоположительных рядов 22](#_Toc376102841)

[20. Признак Даламбера 23](#_Toc376102845)

[21. Радикальный признак Коши 23](#_Toc376102846)

[22. Интегральный признак Коши 24](#_Toc376102847)

[23. Признак Лейбница для знакочередующихся рядов 24](#_Toc376102848)

[24. Абсолютно и условно сходящиеся ряды и их свойства 25](#_Toc376102850)

[25. Понятие равномерной сходимости ряда. Признак Вейерштрасса. Свойства равномерно сходящихся рядов 26](#_Toc376102854)

[26. Степенные ряды. Теорема Абеля 27](#_Toc376102858)

[27. Ряды Тейлора и Маклорена. Остаточный член 29](#_Toc376102864)

[28. Разложения элементарных функций 30](#_Toc376102867)

[29. Ряды с комплексными членами. Теорема Абеля 31](#_Toc376102871)

[30. Ряд Фурье по ортогональной системе функций. Многочлен Фурье 32](#_Toc376102874)

[31. Тригонометрические многочлены и ряды. Формула Фурье-Эйлера. Ядро Дирихле 33](#_Toc376102877)

[32. Основные теоремы о сходимости рядов Фурье 35](#_Toc376102879)

[33. Свойства коэффициентов Фурье 35](#_Toc376102880)

[34. Ряды Фурье в комплексной форме 37](#_Toc376102884)

[35. Равномерная сходимость рядов Фурье. Сходимость рядов Фурье «в среднем» 37](#_Toc376102885)

[36. Равенство Парсеваля 38](#_Toc376102887)

[37. Преобразования Фурье 38](#_Toc376102888)

[38. Комплексная форма интеграла Фурье 39](#_Toc376102889)

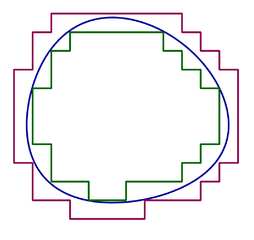
# Мера в – мерном пространстве. Кратный интеграл

## Объем (мера) в -мерном пространстве

Рассмотрим пространство . Точка в таком пространстве будет характеризоваться набором координат . Введем понятие -мерного куба: . Это куб со стороной . Определим его объем как .

Разобьем на кубы ранга : . Множество всех кубов ранга обозначим как , т.е. . Тогда, объем каждого такого кубика будет равен .

Пусть есть некое тело, состоящее из кубиков ранга : . Сложив их, получим . Отсюда мера , если сумма конечна, и , если сумма бесконечна. По определению мера пустого множества равна нулю.

**Свойство:** Пусть , тогда .

Пусть – некое множество (на рисунке синим). Обозначим множество всех кубов ранга , содержащихся в (на рисунке зеленым), как , т.е. . А множество всех кубов ранга , пересекающихся с (на рисунке сиреневым), обозначим как , т.е. . При изменении размеров кубов можно заметить следующие закономерности: и , причем , а ,точнее говоря, . Для мер этих кубов можно провести аналогичные рассуждения: . Левая часть последовательности монотонно убывает и ограничена снизу, аналогично правая часть монотонно возрастает и ограничена сверху, а значит существуют пределы и , которые носят названия нижней и верхней меры соответственно, причем для них будет всегда выполняться неравенство . Множество называется измеримым ( – квадрируемым, - кубируемым), если верхняя и нижняя меры в пределе совпадают и тогда . Если , то множество будет являться множеством меры 0.

**Замечание:** Если , то и , и множество измеримо меры 0.

**Замечание:** Если множество ограничено, то и , но при этом множество может быть неизмеримым (они могут не совпадать).

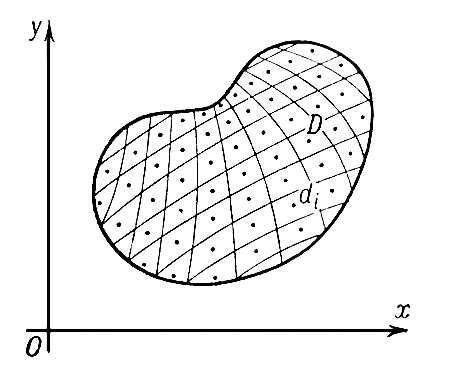
**Замечание:** Если и функция непрерывна в , тогда мера графика равна нулю.

**Замечание:** Пусть множество измеримо, а множество будет включать в себя множество и его границу (являться замкнутым множеством), тогда множество будет также измеримо, и их меры будут совпадать.

## Кратные интегралы

Пусть множество измеримо. Введем конечную систему непустых измеримых множеств . Тогда будет называться разбиением множества , если:

1. Мера пересечения двух любых таких множеств .
2. .

Диаметром некоторого множества называется наибольшее расстояние между двумя точками данного множества , . Мелкостью разбиения называют число .

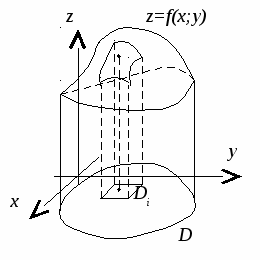
Давайте построим кратный интеграл. Внутри каждого разбиения возьмем точку , вычислим в ней значение функции (заданной на ), умножим на меру этого множества и просуммируем: . Эта сумма называется суммой Римана функции , соответствующей разбиению .

Функция называется интегрируемой по Риману на множестве , если существует предел последовательности интегральной суммы Римана при мелкости , не зависящей от разбиения и от выбора точек .

Интеграл обозначается как . По определению кратный интеграл есть предел . Запишем то же самое определение другим образом. Если для любого сколь угодно малого числа существует такая, что для любого разбиения множества мелкость и при любом выборе предел (интеграл) отличается от суммы Римана по модулю меньше, чем на : .

# Двойной интеграл и его свойства

## Двойной интеграл

Пусть есть область и пусть в этой области определены непрерывная функция и разбиение . Тогда существует двойной интеграл . Величина будет являться объемом ступенчатого тела, – площадью основной ступени, а – высотой ступени. Тогда величина будет являться объемом тела, ограниченного функцией над множеством .

## Свойства двойного интеграла

1. + ( и – непрерывны на ).
2. .
3. Если на , то .
4. Пусть множество есть объединение двух измеримых областей, мера пересечения которых равна нулю , тогда .
5. **Теорема 1 (об оценке интеграла).** Пусть – площадь компактной области и пусть функция задана (и непрерывна) на . Тогда на этой области функция достигает своего минимума и максимума: , и выполняется неравенство .

**Доказательство.** Рассмотрим на . Тогда , а, значит, по первому свойству, . По определению левая часть равна , откуда получаем . Аналогичные рассуждения можно провести и для левой части исходного неравенства. Доказано.

**Замечание.** Если выполняется неравенство для непрерывных функций в , то .

# Вычисление двойного интеграла. Формула Дирихле

## Существование двойного интеграла

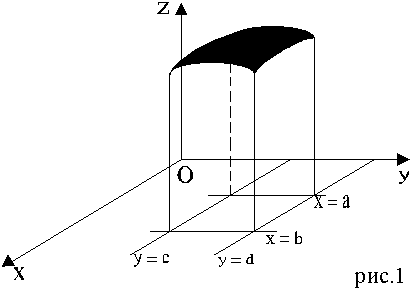
Для взятия двойного интеграла необходимо разбивать область на части: – разбиение , задана на . Введем . и используются вместо минимума и максимума потому, что множество открытое, и максимум или минимум могут и не достигаться. Можно составить следующие суммы: , которые будут называться нижней и верхней суммой Дарбу соответственно. Очевидно, что .

**Теорема 2.** Для того, чтобы функция, ограниченная на измеримом множестве , была интегрируемая по Риману, необходимо и достаточно, чтобы . При этом .

**Замечание.** Пусть непрерывна на (ограниченная ), тогда существует .

## Вычисление двойного интеграла в случае, когда – прямоугольная область

Пусть есть область . Построим сечение тела плоскостью , площадь которого обозначим как .

**Теорема 3.** Если функция интегрируема на и для любого функция интегрируема по , то функция интегрируема на и .

**Замечание.** Для правый интеграл называется внутренним, а левый – повторным.

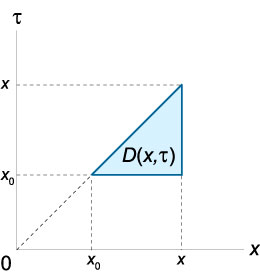
**Замечание.** Аналогичная теорема верна и для случая .

**Доказательство.** Пусть и – разбиения отрезков и соответственно: . Возьмем прямые произведения этих отрезков: . Обозначим . Для любой точки выполняется неравенство . Проинтегрировав от до , получим неравенство , которое будет выполняться для любого . Просуммируем: . Тогда . Домножим на и просуммируем по : . Заметим, что последнее неравенство аналогично другому: или .Пусть интегрируема на . Тогда для любого существует такое, что для любого . Возьмем . Тогда , а , откуда , и, следовательно, ,. Тогда интегрируема на , и . Но . Выходит, что , откуда следует, что они совпадают. Доказано.

## Вычисление двойного интеграла повторным интегрированием по произвольной области

**Теорема 4.** Пусть на , задана область – компакт, квадрируема и интегрируема по Риману на . Тогда интегрируема на и .

**Замечание.** Аналогичная теорема имеет место и в случае области . Тогда .

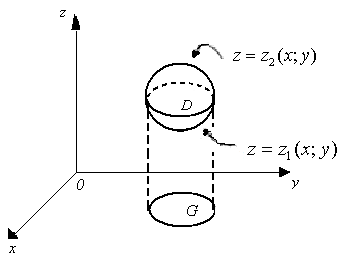
**Замечание.** Если область имеет сложную форму, то ее можно разбить на области, интегралы которых можно вычислить через повторные.

**Замечание.** .

## Формула Дирихле

. Для области справедливо равенство .

# Тройной интеграл и его вычисление

Пусть есть некоторая область и пусть в области задана функция . – проекция на . Пусть обладает свойством, что любая прямая, параллельная осям координат, пересекает не более, чем в двух точках. – линия, которая проектируется на область . разбиваем на элементарные объемы , причем имеет объем . Тройной интеграл по определению , где . Если предел в правой части существует и не зависит от разбиения и выбора точек , то тогда существует тройной интеграл.

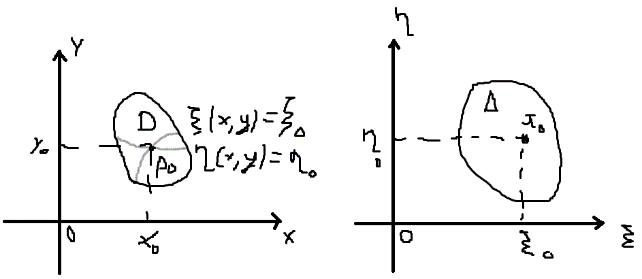
## Вычисление тройного интеграла

Для каждой точки считаем – нижняя граница и – верхняя граница . Если ввести функцию , то тройной интеграл можно представить в виде .

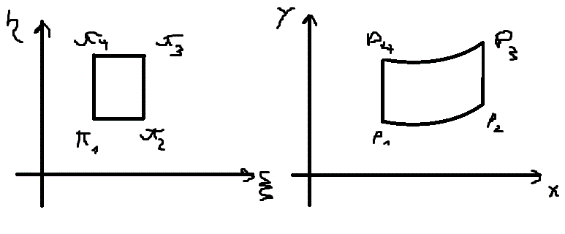
**Замечание.** Если область сложная, то ее всегда можно разбить на области, для которых любая прямая, параллельная осям координат, пересекает границу области не более, чем в 2 точках.

# Замена переменной в двойном интеграле

## Преобразование плоских областей

Пусть даны две плоскости и и две области и . Область является прообразом , т.е. каждой точке из одной области ставится в соответствие ровно одна точка из другой области (взаимно-однозначное). Возьмем точки и . Если мы зафиксируем значения и , то и в области будут отображением прямых и в области , то есть – взаимно-однозначное отображение в , а – обратное . Линии носят название координатных линий в (криволинейные координаты).

## Преобразование разбиений

В плоскости возьмем прямоугольную область (разбиение) и ее отображение в плоскости . Координаты прямоугольника в : . Координаты в : . Выразим точки через точки :.

Пусть и – непрерывно-дифференцируемые функции. Тогда , где и – бесконечно малые более высокого порядка малости, чем и .

Рассмотрим проекции сторон : ; . Аналогичным образом вычислим остальные проекции.

Пусть – площадь . . Последний определитель называется якобианом преобразования , и обозначается .

Если рассмотреть отношение площадей .

**Замечание.** Определитель положителен, если обход точек сохраняется, и отрицательный, если не сохраняется.

## Формула замены переменной в двойном интеграле

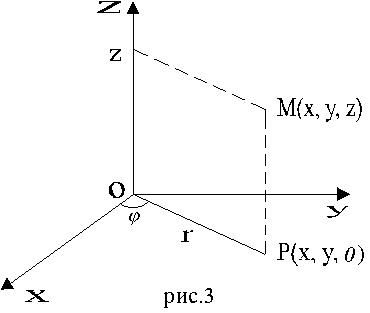
Модель якобиана преобразования характеризует искажение площади. Рассмотрим , где - разбиение , которое порождает – разбиение , .

**Пример.** Двойной интеграл в полярных координатах. – формула перехода к полярным координатам. Пусть – в полярных координатах, тогда – в декартовых. Якобиан тогда равен . Получаем .

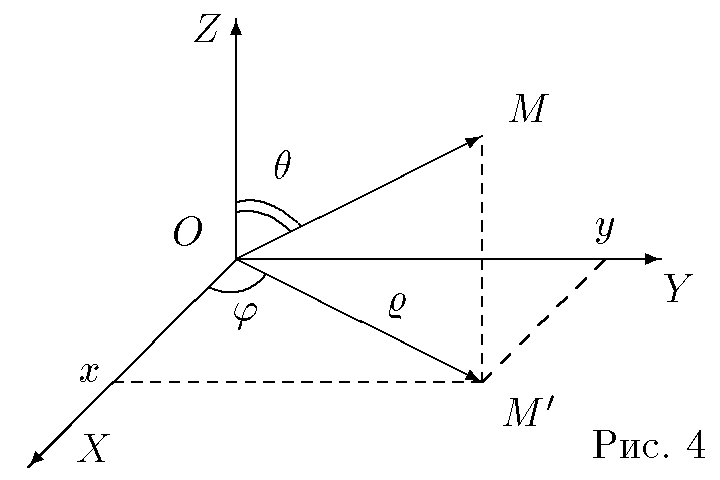
# Якобиан в полярных, цилиндрических и сферических координатах

В полярных координатах – смотри конец предыдущего билета.

## Замена переменной в тройном интеграле. Цилиндрические и сферические координаты

Пусть . Область в плоскости переходит в в плоскости , т.е. . Цилиндрические координаты отличаются от полярных только добавлением третьего измерения . Тогда .

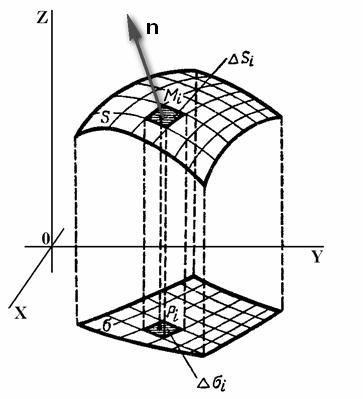
Отсюда .

Для сферических координат точке будем сопоставлять три переменные (см. рисунок): , . Обратным преобразованием в данном случае является .

Якобианом преобразования будет являться . Отсюда .

# Площадь поверхности

Пусть в задана непрерывная дифференцируемая функция . Пусть – поверхность, которая проектируется на область .

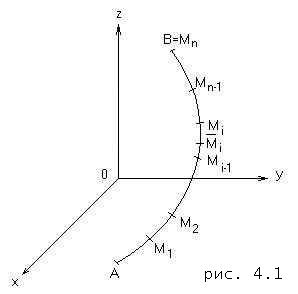
Площадь поверхности измеряется пределом, к которому стремится площадь многогранника, описанного около поверхности при неограниченном увеличении числа его граней и при стремлении к нулю наибольшего из диаметров этих граней.

Описанный многогранник задает разбиение области . Пусть и – проекция точки и точка касания . Тогда уравнение касательной плоскости будет выглядеть следующим образом: . Обозначим площадь каждой грани как , а площадь ее проекции как . Тогда , где – угол между нормалью в точке и осью . Координаты этого вектора нормали будут совпадать с координатами вектора градиента: , так как мы рассматриваем внешнюю нормаль. Единичный вектор нормали к поверхности тогда будет равен:

будет тогда равен . Тогда . Теперь можно выразить площадь поверхности как , где – грань, – ее площадь, – число разбиений. Подставим в наше выражение : . При большом количестве разбиений можно перейти к интегральной сумме .

**Замечание:** Cложную фигуру можно разбить на части, каждую из которых можно однозначно спроектировать на какую-либо координатную плоскость.

# Криволинейный интеграл 1 рода и его свойства. Вычисление

Пусть – кусочно-гладкая кривая, которая представляется как , где , и каждый кусок которой имеет производную. Пусть является дугой . Разобьем ее на частей так, что , , а – точки деления дуги . Пусть на задана функция . Для каждого промежутка – длина промежутка, или звена ломаной, вписанной в кривую. На каждом промежутке возьмем точку , принадлежащую куску ломаной. В каждой такой точке посчитаем значение функции, умножим на длину звена и составим сумму для всех звеньев: .

По определению, интегралом первого рода от функции по кривой называется предел последовательности интегральных сумм при условии, что и не зависит от выбора точек на кривой и характера разбиения кривой на отрезки. .

**Замечание:** Иногда интеграл 1 рода называется интегралом по длине.

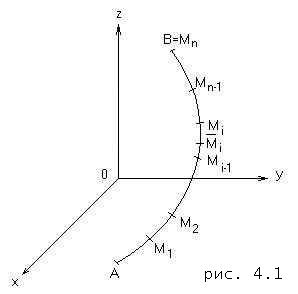
## Свойства криволинейных интегралов 1 рода

1. Линейность
   1. .
   2. .
2. – длина дуги .
3. Интеграл не зависит от ориентации кривой.
4. Пусть и имеют только одну общую точку. Тогда .

## Вычисление криволинейных интегралов 1 рода

Пусть . Тогда . Криволинейный интеграл вычисляется как . В случае кривой на плоскости: .

# Криволинейный интеграл 2 рода и его свойства. Вычисление

Пусть – кусочно-гладкая кривая, которая представляется как , где , и каждый кусок которой имеет производную. Пусть является дугой . Разобьем кривую на частей так, что точки деления будут: . На каждой дуге выберем точку . Для каждой дуги обозначим как ее проекцию на ось . Пусть на задана функция . В каждой точке посчитаем значение функции и умножим на проекцию длины звена и составим сумму для всех звеньев: .

По определению, интеграл второго рода от функции по кривой по переменной называется предел последовательности интегральных сумм при условии, что и не зависит от выбора точек на кривой и характера разбиения кривой на отрезки. . При смене ориентации знак криволинейного интеграла второго рода меняется на противоположный. Аналогичным образом выводятся криволинейные интегралы второго рода по проекции на другую координатную ось.

Пусть на задана вектор-функция . Тогда .

**Пример:** Работа силы по кривой .

## Свойства криволинейных интегралов 2 рода

1. Линейность
   1. .
   2. .
2. Пусть и имеют только одну общую точку. Тогда .
3. Пусть – область, – ее граница . Пусть . Пусть непрерывна в . Тогда .

**Доказательство.** , . Тогда .

**Замечание.** Это свойство обобщается на любое количество разбиений области .

## Вычисление криволинейных интегралов 2 рода

. Пусть кривая задается параметрически: , – дифференцируемые функции. Тогда координаты точек будут . Обозначим точку , лежащую произвольно на кривой в промежутке . Обозначим длину дуги как . Тогда . Вектор касательной к кривой будет выражаться как . Длина касательного вектора будет равна (корень квадратный из суммы квадратов). Тогда единичный вектор касательной можно будет выразить как . У этого вектора есть направляющие косинусы . Отсюда можно выразить . Подставив в исходный интеграл, получим . Тем самым мы свели интеграл второго рода к интегралу первого рода. В параметрическом виде интеграл можно записать в форме .

В случае кривой график функции на плоскости интеграл принимает вид .

# Независимость криволинейного интегрирования от контура интегрирования

Пусть дуга . Вычислим интеграл .

1. . .
2. . .

Если провести те же расчет для интеграла , то выяснится, что в первом и втором случае интегралы равны. Необходимо понять, какие необходимы условия, чтобы криволинейный интеграл 2 рода не зависел от пути интегрирования, а зависел только от начальной и конечной точки.

**Теорема 5.** Для независимости криволинейного интеграла 2 рода от контура интегрирования необходимо достаточно, чтобы , т.е. , .

**Доказательство.** Пусть кривая задается параметрически: , – дифференцируемые функции. связывает точки и . , откуда следует что интеграл не зависит от пути интегрирования.

**Теорема 6.** Для выполнения необходимо и достаточно, чтобы .

**Доказательство.** Если – полный дифференциал, то . , откуда и вытекает требуемое.

**Замечание.** тогда и только тогда, когда .

**Замечание.** Пусть есть . Тогда не зависит от пути интегрирования тогда и только тогда, когда , т.е. тогда, когда .

# Формула Грина для односвязной и многосвязной областей

## БезымянныйВывод формулы Грина для односвязной области

Пусть на плоскости задана односвязная область такая, что любая прямая, параллельная осям координат, пересекает границу этой области не более, чем в двух точках. Обозначим как ее границу. Тогда область можно определить двумя способами:

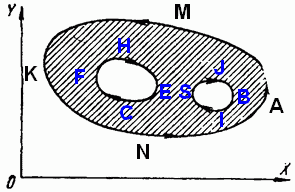
Будем обходить контур в положительном направлении.

**Теорема 7.** Пусть – элементарная область. Функции непрерывны вместе со своими производными на замыкании (область вместе с ее границей). Тогда выполняется равенство . Эта формула называется формулой Грина. Она связывает криволинейный интеграл и двойной интеграл.

**Доказательство.** Рассмотрим . Аналогичным образом выводится и для функции .

**Замечание.** Если область односвязная, но не является элементарной, то ее всегда можно разбить на элементарные области.

## Формула Грина для многосвязной области

**Теорема 8.** Пусть – -связная область. Функции непрерывны вместе со своими производными на замыкании . Тогда для этой области выполняется формула Грина на условии .

**Доказательство.** Не умоляя общности, рассмотрим трехсвязную область. Сделаем разрезы . Тогда

# Следствия из формулы Грина

1. Пусть – односвязная область, – ее граница. Пусть для нее справедлива формула Грина. Пусть . Тогда . Тогда .
2. Если в выполняется , то .
3. Пусть . Тогда – оператор Лапласа (лапласиан). В этом случае формула Грина привет вид – производная по направлению, где – нормаль, – касательная. Переходы косинусов к синусам сделаны с помощью .

**Пример.** . Тогда .

# Несобственные двойные интегралы. Интеграл Пуассона

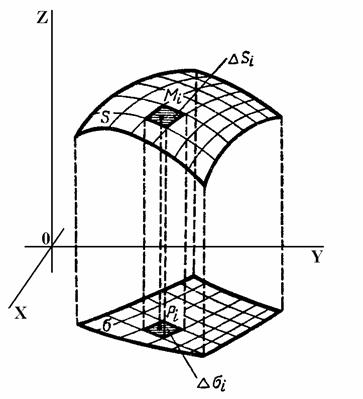
Пусть – неограниченная область в , пусть непрерывна в . Рассмотрим ограниченную область . Составим двойной интеграл по ней: . Будем произвольно расширять область до области .

Если существует , который не зависит от характера расширения, то этот предел и называется несобственным двойным интегралом. Если этот предел конечен, то говорят о сходимости несобственного двойного интеграла. Если не существует или бесконечен – о расходимости, или несуществовании.

Рассмотрим интеграл . Составим двойной несобственный интеграл , где – круг радиуса . Получаем . Отсюда , значит .

# Поверхностные интегралы 1 и 2 рода

## Поверхностные интегралы 1 рода (интегралы по площади поверхности)

Пусть на области определена непрерывная дифференцируемая функция , задающая поверхность . Пусть задан описанный многогранник и точка касания грани поверхности. Пусть на задана функция . Тогда можно составить интегральную сумму . Если устремить количество разбиений к бесконечности и максимальный диаметр каждой грани к нулю, и если существует соответствующий предел, который не зависит от характера разбиения и выбора точек , то этот предел будет называться поверхностным интегралом первого рода по поверхности . .

Для вычисления такого интеграла спроектируем на многогранник . Тогда спроектируется на , – площадь . Тогда , где – угол между нормалью к поверхности в точке касания и положительным направлением оси . Тогда , где – проекция на . Получаем формулу вычисления поверхностного интеграла 1 рода: .

## Поверхностные интегралы 2 рода (интегралы по координатам)

Ориентация поверхности производится с помощью нормали. Поверхностный интеграл называется ориентированным, если указано направление нормали при условии, что направление нормали меняется непрерывно вместе с точкой поверхности, к которой проведена нормаль. Существуют также неориентированные поверхности (лист Мебиуса).

Пусть на области определена непрерывная дифференцируемая функция , задающая поверхность . Пусть задан описанный многогранник и точка касания грани поверхности. Спроектируем на многогранник . Тогда спроектируется на , – площадь . Тогда , где – угол между нормалью к поверхности в точке касания и положительным направлением оси . Если угол острый, то , если тупой, то . Пусть на задана функция . Тогда можно составить интегральную сумму . Если устремить количество разбиений к бесконечности и максимальный диаметр каждой грани к нулю, и если существует соответствующий предел, который не зависит от характера разбиения и выбора точек , то этот предел будет называться поверхностным интегралом второго рода по поверхности . . Если проектировать на другие координатные оси, то получим .

## Связь с интегралом первого рода

Пусть – направляющие косинусы вектора нормали. Тогда . Аналогичным образом можно составить и выражения для проектирования на другие координатные оси.

## Свойства интегралов по координатам

1. При смене ориентации поверхностный интеграл меняет знак.
2. Аддитивность.
3. Пусть на заданы . Тогда .

# Скалярные и векторные поля. Свойства дивергенции, ротора, градиента. Оператор Набла

## Скалярные и векторные поля. Оператор Набла

Пусть в задана область , в которой задана непрерывная дифференцируемая функция . В этом случае будем говорить, что в задано скалярное поле.

Пусть в заданы непрерывные дифференцируемые функции . В этом случае будем говорить, что в задано векторное поле .

Векторная линия – линия , направление которой в каждой точке совпадает с направлением , т.е. можно составить дифференциальное уравнение в векторном виде:

Если в области задано скалярное поле , то – задает векторное поле, а – оператор Набла. .

## Соотношения между

– оператор Лапласа, .

# Поток векторного поля. Дивергенция. Соленоидальные поля. Формула Гаусса-Остроградского

## http://physic.kemsu.ru/pub/library/OVTA_DISK_FIN/OVTA_V2/2_15.pngПоток векторного поля. Дивергенция. Соленоидальные поля

Пусть задано векторное поле в , которое проходит через поверхность . Пусть точка , – единичный вектор нормали к поверхности в точке . Элемент поверхности обозначим как . Тогда – высота цилиндра с основанием , – объем жидкости, прошедшего через в единицу времени. Тогда величину называют потоком вектора через поверхность . Если координаты вектора нормали заданы направляющими косинусами , то интеграл по площади поверхности можно свести к интегралу по координатам . Также поток можно выразить через тройной интеграл по теореме Гаусса-Остроградского, если поверхность замкнутая: . Величину называют дивергенцией поля . Дивергенцию можно также выразить через оператор Набла, как скалярное произведение . С помощью данной формулы можно переписать формулу Гаусса-Остроградского в дифференциальной форме: . Если поверхность начать стягивать в точку , то , где . Если будем стягивать в точку , то и . Тогда получим . – объем области .

Дивергенция характеризует относительное расширение объема жидкости в окрестности точки . Если , то и поток через поверхность равен нулю. Поля, у которых дивергенция равна нулю, называют соленоидальными, или бездивергентными. Дивергенция характеризует наличие вход/выход жидкости в точке.

## Формула Гаусса-Остроградского

Связывает поверхностный интеграл с тройным. Пусть в задана область , а – граница этой области. Тогда , причем интегрирование ведется по внешней нормали.

**Замечание.** Пусть . Тогда . Тогда объем тела, ограниченного , вычисляется по формуле .

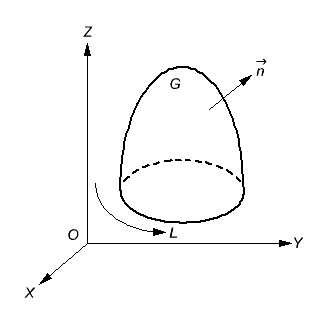
# Циркуляция векторного поля. Потенциальные поля. Ротор. Формула Стокса

## Циркуляция векторного поля. Потенциальные поля

Пусть в задано векторное поле и некая кривая , заданная параметрически . Пусть на кривой есть точка . Обозначим элемент дуги кривой как . Пусть – проекция на касательную к в каждой точке. Тогда , если вектор касательной единичный, и . Если возьмем величину – количество жидкости, сосредоточенное на дуге . Проинтегрировав, получим циркуляцию вектора по контуру . . Циркуляцию можно выразить не только через криволинейный интеграл 1 рода, но и через криволинейный интеграл 2 рода: . Также циркуляцию можно выразить через двойной интеграл по формуле Стокса: . Величина, равная называется ротором вектора . Если координаты вектора нормали заданы направляющими косинусами , то . При стягивании поверхности в точку получим .

Если d , то такое поле называется потенциальным, или безвихревым. Следовательно, и . Тогда .

## Формула Стокса

Пусть – поверхность , – граница поверхности (кривая в пространстве). Тогда от поверхностного интеграла 2 рода можно перейти к криволинейному интегралу 2 рода: – обобщение формулы Грина, формула Стокса. Обход контура выбирается по правилу правой руки.

**Замечание.** В случае формула переходит в формулу Грина.

**Замечание.** Пусть – замкнутая ориентированная поверхность. Тогда .

**Замечание.** Пусть . Тогда .

# Числовой ряд. Необходимое условие сходимости ряда. Гармонический ряд. Критерий Коши.

## Основные определения

Бесконечная сумма членов последовательности вида называется рядом . Последовательность вида называется последовательностью частичных сумм. Если эта последовательность не имеет предела, то ряд называется расходящимся, или не имеющим суммы, и сходящимся, если имеет.

**Теорема 1.** Если ряд сходится , то общий член этого ряда стремится к нулю.

**Доказательство.** . Следовательно, .

**Замечание.** Необходимое условие сходимости ряда является достаточным условием его расходимости.

**Замечание.** Если общий член ряда стремится к нулю, то это еще не значит, что ряд сходится.

## Свойства сходящихся рядов

1. Если сходится, то для любого ряд сходится, и если , то .
2. Если и сходятся, то сходится и ряд .
3. Если у сходящегося ряда отбросить или приписать конечное число членов, то сходимость ряда не изменится.

**Замечание.** – остаток (хвост) ряда.

## Гармонический ряд

Гармонический ряд – расходящийся, несмотря на то, что . Второй замечательный предел: . Следовательно, . Если выписать члены данного ряда, получим: . Если расписать сумму ряда, сократятся многие члены, останется только . Но . Тогда ряд расходится по определению.

**Замечание.** Ряд , где , называется обобщенным гармоническим рядом. Он расходится при и сходится .

## Критерий Коши сходимости ряда

**Теорема 2.** Ряд сходится тогда и только тогда, когда для любого существует такое , что для любого и справедливо неравенство .

**Доказательство.** Критерий Коши сходимости ряда сводится к критерию Коши сходимости последовательности частичных сумм .

# Признаки сравнения знакоположительных рядов

## Ряды с положительными членами

## Лемма о сходимости ряда с положительными членами

**Лемма.** Если последовательность ряда ограничена, то ряд сходится.

**Доказательство.** . Но . Следовательно, . Также, ограничена сверху. Следовательно, существует предел . А значит ряд сходится по определению.

## Признаки сравнения

**Теорема 3 (Первый признак сравнения).** Пусть есть ряды с положительными членами .

1. Если, начиная с некоторого места, и ряд сходится, то и ряд сходится.
2. Если, начиная с некоторого места, и ряд расходится, то и ряд расходится.

**Доказательство.**

1. Не умоляя общности, скажем, что для любого выполняется . Пусть . Тогда . Но ограничена. Следовательно, возрастает и ограничена. Следовательно, существует предел . Следовательно, ряд сходится по определению.
2. От противного.

**Теорема 4 (Второй признак сравнения).** Пусть есть ряды с положительными членами , и, начиная с некоторого места, .

1. Если сходится ряд с большим отношением, то сходится и ряд с меньшим.
2. Если расходится ряд с меньшим отношением, то расходится и ряд с большим.

**Доказательство.** Не умоляя общности, скажем, что для любого выполняется . Распишем это для каждого : . Если мы перемножим все полученные неравенства, сократятся почти все члены, останется только , откуда можно выразить . Применив теорему 3, доказательство очевидно.

**Теорема 5.** Пусть есть ряды с положительными членами , и, если существует предел , то оба ряда либо одновременно сходятся, либо одновременно расходятся.

**Доказательство.** Пусть существует предел , то для любого существует такое , что для любого выполняется неравенство . Следовательно, , откуда . Получается, что по теореме 3 эти ряды ведут себя одинаково. Если , то они являются эквивалентными бесконечно малыми.

**Пример.** . Второй ряд расходится. Значит, исходный ряд расходится.

# Признак Даламбера

**Теорема 6.** Пусть есть ряд с положительными членами и если существует предел , то при ряд расходится, при ряд сходится, при неизвестно, требуется дополнительное исследование.

**Доказательство.** Пусть существует предел . Тогда для любого существует такое , что для любого выполняется неравенство . Тогда .

Пусть . Тогда . Тогда и сходится. Следовательно, по теореме 4 ряд сходится.

Пусть . Тогда . Тогда и расходится. Следовательно, по теореме 4 ряд расходится.

# Радикальный признак Коши

**Теорема 7.** Если существует предел , то при ряд расходится, при ряд сходится, при требуется дополнительное исследование.

**Доказательство.** Пусть существует предел . Тогда для любого существует такое , что для любого выполняется неравенство . Тогда .

Пусть . Тогда . Тогда и сходится. Следовательно, по теореме 3 ряд сходится.

Пусть . Тогда . Тогда и расходится. Следовательно, по теореме 3 ряд расходится.

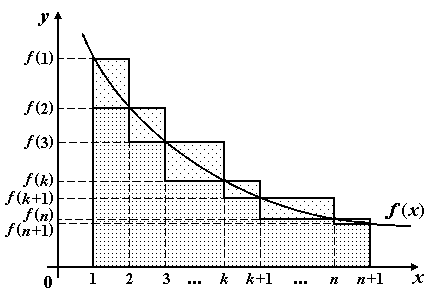
**Пример.** . Тогда . Следовательно, интеграл сходится.

# Интегральный признак Коши

Пусть есть ряд с положительными членами и задана монотонно убывающая функция на и .

**Теорема 8.**

1. сходится тогда и только тогда, когда сходится.
2. расходится тогда и только тогда, когда расходится.

**Доказательство.** Площадь ступенчатой фигуры – сумма ряда, площадь криволинейной трапеции – несобственный интеграл. Если ряд больше и сходится, то и интеграл тоже. С другой стороны, вписанный ряд (без первого члена) будет меньше криволинейной трапеции, и если сходится интеграл, то сходится и ряд.

. Это равносильно . Отсюда: если существует предел , то существует и интеграл; если существует интеграл, то существует и предел .

# Признак Лейбница для знакочередующихся рядов

## Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница

**Теорема 9 (Признак Лейбница).** Пусть есть ряд . Пусть монотонно убывает до нуля. Тогда ряд сходится и его сумма не превосходит первого члена ряда.

**Доказательство.** Рассмотрим четную сумму . В силу монотонности каждое из выражений в скобках положительно, отсюда следует, что монотонная возрастает. С другой стороны, если перегруппировать выражение как , то каждое выражение в скобках тоже будет положительным, и . Получается, что возрастает и ограничена сверху. Следовательно, она имеет предел . Теперь рассмотрим нечетные суммы . . Значит существует и предел нечетных сумм. Получается, что исходная последовательность также имеет предел .

**Пример.** Ряд сходится (ряд Лейбница).

**Замечание.** Остаток знакочередующегося ряда обладает всеми его свойствами, например, его сумма по модулю не превосходит первого отброшенного члена . С помощью этого признака можно оценивать погрешность.

# Абсолютно и условно сходящиеся ряды и их свойства

## Абсолютная и условная сходимость

Пусть есть знакопеременный ряд . Рассмотрим знакоположительный ряд .

**Теорема 10.** Если ряд сходится, то тогда сходится и знакочередующийся ряд .

**Доказательство.** Пусть ряд сходится. Тогда по критерию Коши для любого существует такое , что для любого и натурального выполняется неравенство . Тогда . Тогда по критерию Коши ряд сходится.

Если сходится основной ряд и ряд из абсолютных величин, то такой ряд называется абсолютно сходящимся. Если сходится только основной ряд, а ряд из абсолютных величин расходится, то ряд сходится условно.

## Свойства абсолютно сходящихся рядов

1. В абсолютно сходящемся ряде можно поменять местами члены ряда любым образом, при этом при такой перестановке получается абсолютно сходящийся ряд с той же суммой.
2. Два абсолютно сходящихся ряда можно почленно складывать и вычитать. В результате получится ряд с суммой, равной сумме или разности сумм исходных рядов соответственно.
3. Рассмотрим абсолютно сходящиеся ряды . Назовем произведение этих рядов другим рядом , т.е. . К тому же, если , то .

## Свойства условно сходящихся рядов

1. Пусть есть условно сходящийся ряд . Обозначим его положительные члены и отрицательные . Множества и бесконечны. Для пояснения последнего пойдем от противного: пусть множество конечно. Тогда можно рассмотреть хвост ряда, который содержит только положительные члены. Этот хвост будет хвостом сходящегося ряда, составленного из абсолютных величин, т.е. ряд сходится абсолютно. Противоречие. Значит, множество бесконечно. Аналогичные рассуждения можно провести и для множества .
2. Ряды и расходятся.

**Доказательство.** Пусть . Получаем, что . Следовательно, . Получаем, что ряд из положительных значений расходится. Аналогичные рассуждения можно провести и для ряда с отрицательными членами.

1. **Теорема 11 (Римана).** Пусть (или ). В условно сходящемся ряде можно так переставить члены, что его сумма будет равняться .

**Идея доказательства.** Рассмотрим число . Так как ряд, составленный из положительных членов, расходится, то выполняется неравенство . Потом наберем такое количество отрицательных членов, чтобы выполнялось неравенство . Так, постепенно набирая то положительные, то отрицательные члены, сумма выражения начинает приближаться к числу .

# Понятие равномерной сходимости ряда. Признак Вейерштрасса. Свойства равномерно сходящихся рядов

## Функциональные ряды

## Основные определения

Ряд называется функциональным, если каждый член ряд есть некая функция от . .

Если при числовой ряд сходится, то – точка сходимости. Множество всех точек сходимости называется областью сходимости ряда. В области сходимости ряда можно определить сумму ряда как функцию . При этом можно записать в виде , где – хвост ряда. В каждой точке области сходимости стремится к нулю .

Пусть принадлежит области сходимости. Тогда для любого существует такое , что для любого выполняется .

Пусть принадлежит области сходимости. Тогда для любого существует такое , что для любого выполняется .

Можно сказать, что для любого конечного числа точек из области сходимости существует такое такое, что для любого и из набора выполняется неравенство .

Сходящийся функциональный ряд называется равномерно сходящимся в области , если для любого существует такое , что для любого и для любого выполняется неравенство .

## Свойства равномерно сходящихся рядов

Ряд называется мажорируемым в некоторой области , если существует такой ряд , что для любого выполняется неравенство .

**Теорема 12 (Признак Вейерштрасса равномерной сходимости ряда).** Пусть ряд – мажорируемый в некоторой области и мажорантный ряд – сходящийся, то мажорируемый ряд сходится равномерно в .

**Доказательство.** Ряд сходится, следовательно, по критерию Коши для любого существует такое , что для любого и для любого натурального выполняется неравенство . Следовательно, . Получается, что для любого выполняется , а при для любого выполняется . А так как , то получается, что . Следовательно, ряд сходится равномерно по определению.

**Замечание.** Мажорируемый ряд сходится на не только равномерно, но и абсолютно.

**Теорема 13.** Равномерно сходящийся в области ряд, составленный из непрерывных функций, представляет собой функцию, непрерывную в этой области. Без доказательства.

**Пример.** . Для любого выполняется , а сходящийся. Следовательно, – непрерывная функция на .

**Теорема 14.** Равномерно сходящийся ряд непрерывных функций можно интегрировать почленно. Пусть дано, что ряд равномерно сходится на и пусть для любого непрерывна в и пусть . Тогда на любом промежутке выполняется . Без доказательства.

**Теорема 15.** Пусть ряд дифференцируемых в функций равномерно сходится в и – его сумма, то . Без доказательства.

# Степенные ряды. Теорема Абеля

## Степенные ряды

Ряд вида называется степенным рядом. Ряд вида – тоже степенной, где – центр ряда.

## Теорема Абеля

**Теорема 16 (Абеля о сходимости степенного ряда).**

1) Пусть степенной ряд сходится в точке . Тогда для любого такого, что ряд сходится.

2) Пусть степенной ряд расходится в точке . Тогда для любого такого, что ряд расходится.

**Доказательство.**

1) Пусть ряд сходится. Тогда его общий член стремится к нулю . Тогда существует такое , что для любого выполняется . Рассмотрим ряд . Теперь рассмотрим ряд, состоящий из абсолютных величин . Все правые модули, как уже было сказано, меньше . Тогда этот ряд можно смажорировать так, что для любого будет выполняться . – геометрическая прогрессия с . Тогда, по признаку сравнения ряд сходится абсолютно и, следовательно, сходится.

2) От противного. Если расходится в точке и сходится в точках , то по первому пункту должен сойтись и в точке . Противоречие. Следовательно, расходится в точках .

## Радиус сходимости степенного ряда

Рассмотрим сходящийся в точке степенной ряд . Тогда он сходится по теореме Абеля в любой точке . По второй части теоремы Абеля, пусть ряд расходится в некоторой точке . Тогда в любой точке ряд будет расходящимся. Теперь проверим на расходимость в точке . Теперь отрезок с неизвестной сходимостью уменьшился в два раза. Так можно продолжать до бесконечности, постоянно уменьшая неизвестный отрезок. Можно перейти к пределу. Пусть существует предел . Получаем, что для любого ряд сходится, а для любого ряд расходится. Число называется радиусом сходимости степенного ряда, интервал – интервалом сходимости. Точки необходимо проверять самостоятельно.

Замечание. Радиус сходимости можно ввести и для степенного ряда вида . Его областью сходимости будет .

## Правило определения радиуса сходимости

1) С использованием признака Даламбера.

**Теорема 17.** Пусть существует предел . Тогда (включая , если и , если ).

**Доказательство.** Пусть и – ряд, состоящий из абсолютных величин. Рассмотрим предел . По признаку Даламбера ряд сходится, если . Получаем, что , т.е. .

2) С использованием радикального признака Коши.

**Теорема 18.** Пусть существует предел . Тогда (включая , если и , если ).

**Доказательство.** Аналогично предыдущему доказательству, рассмотрим предел . По радикальному признаку Коши ряд сходится, если . Получаем, что , т.е. .

## Свойства степенных рядов

**Теорема 19.** Степенной ряд представляет собой непрерывную функцию в интервале сходимости .

**Доказательство.** Для любого рассмотрим ряд . Для него имеем . Мажорирующий ряд сходится абсолютно, следовательно, по признаку Вейерштрасса ряд сходится равномерно, следовательно, – непрерывная функция в .

**Теорема 20.** Для степенного ряда можно почленно дифференцировать , интегрировать на любом отрезке из области сходимости (потому что на нем он сходится равномерно), при этом полученные степенные ряды будут иметь тот же радиус сходимости .

**Доказательство.** Покажем, что . . Аналогично .

# Ряды Тейлора и Маклорена. Остаточный член

## Разложение функций в степенные ряды

Пусть ряд сходится к в области сходимости . Тогда ряд является разложением функции на этом интервале. Обратной задачей является нахождение разложения функции в ряд.

## Ряды Тейлора и Маклорена

Пусть – дифференцируемая бесконечное число раз в точке и в ее окрестности. Пусть существует ее разложение в ряд такое, что его сумма равна и . Возьмем производную . Возьмем вторую производную . Можно вывести закономерность: . Положим . Тогда . Тогда можно записывать выражения для . Данное выражение называется рядом Тейлора функции в точке .

**Замечание.** Если функция дифференцируема бесконечное число раз в точке, то ряд Тейлора всегда можно составить. Но этот ряд может и не сойтись к исходной функции.

Ежели мы берем дифференцируемую бесконечно число раз в точке и в ее окрестности функцию и раскладываем функцию в этой точке в ряд Тейлора, то данный ряд будет являться рядом Маклорена.

**Теорема 20.** Пусть дифференцируема бесконечное число раз в точке и – окрестности этой точки. Тогда для того, чтобы ряд Тейлора в этой точке сходился к исходной функции, необходимо и достаточно, чтобы остаточный член в формуле Тейлора стремился к нулю.

**Доказательство.** Запишем членов ряда Тейлора . Очевидно, что для того, чтобы , необходимо и достаточно, чтобы .

# Разложения элементарных функций

1) . . . То есть разложение справедливо на всей числовой оси. .

2) . . . Можно показать, что .

**Замечание.** При любом – знакочередующийся ряд.

3) . Аналогично синусу, . .

**Замечание.** В случае комплексной переменной имеем . Разложив функцию комплексной переменной в ряд, получим два ряда – действительный и мнимый.

4) . . . Можно показать, что , область сходимости .

5) . . . При получим ряд Лейбница. При получим обобщенный гармонический расходящийся. Можно показать, что , область сходимости .

Очень долго сходится, для вычисления с точностью до надо вычислить членов.

Второй способ: . Почленно интегрируя, получим .

6) . . Ряд сходится на интервале . . Пусть . Тогда . Отсюда .

## Применение рядов к приближенным вычислениям

## Приближенные вычисления функций

Пусть бесконечно дифференцируема в окрестности точки . Тогда ее можно разложить в ряд Тейлора в данной точке . Очевидно, что для вычисления значения функции с определенной точностью достаточно посчитать частичную сумму данного ряда. При этом погрешность можно оценивать двумя способами:

1) С помощью остаточного члена формулы Тейлора .

2) По хвосту ряда .

**Замечание.** Вторая оценка удобна для знакочередующихся рядов.

Пример. . . Для вычисления с точностью до , то , т.е. .

Как ускорить сходимость логарифма: рассмотрим разложение в ряд выражения . Тогда . Для вычисления поимеем . Для достижения точности необходимо вычислить всего 5 членов.

## Приближенные вычисления интегралов

Пусть надо найти . Изначально разложим в ряд Тейлора, при этом промежуток должен попасть в область его сходимости. Тогда на этом промежутке мы можем его интегрировать, и посчитать частичную сумму проинтегрированного ряда. Для вычисления понадобится:

1) Разложить в ряд Тейлора

2) Ограничиться конечным числом членов.

3) Проинтегрировать почленно, оценить погрешность.

**Пример.** .

# Ряды с комплексными членами. Теорема Абеля

## Ряды с комплексными членами

## Числовые ряды

Рядом с комплексными членами называется выражение вида , где . Этот ряд сходится, если существует конечный предел частичных сумм . Тогда . Условия о конечном пределе частичных сумм необходимо и достаточно для того, чтобы существовали пределы . Таким образом, сходимость ряда с комплексными членами эквивалентна сходимости двух вещественных рядов.

**Теорема 22.** Если сходится ряд , то сходится и .

**Доказательство.** . Получаем, что . По признаку сходимости получаем, что если сходится , то сходятся абсолютно и ряды . То есть сходится и ряд .

**Замечание.** Все свойства действительных абсолютно сходящихся рядов переносятся на комплексные абсолютно сходящиеся ряды.

Рассмотрим степенной комплексный ряд , , или в другой форме .

**Теорема 23 (Абеля).** Если степенной комплексный ряд сходится при , то он абсолютно сходится и при любом таком, что . Если этот же ряд расходится в точке , то он будет расходиться и в любой точке такой, что .

**Доказательство.**

1) Пусть ряд сходится. Тогда его общий член стремится к нулю . Тогда существует такое , что для любого выполняется . Рассмотрим ряд . Теперь рассмотрим ряд, состоящий из абсолютных величин . Все правые модули, как уже было сказано, меньше . Тогда этот ряд можно смажорировать так, что для любого будет выполняться . – геометрическая прогрессия с . Тогда, по признаку сравнения ряд сходится абсолютно и, следовательно, сходится.

2) От противного. Если расходится в при и сходится в при , то по первому пункту должен сойтись и при . Противоречие. Следовательно, расходится при .

**Замечание.** Существует радиус сходимости степенного комплексного ряда такой, что при ряд сходится, при расходится, точки на окружности требуют дополнительной проверки. Радиус сходимости можно искать так же, как и для вещественных рядов: по признаку Даламбера.

**Замечание.** Можно вводить функции комплексной переменной через степенные ряды.

# Ряд Фурье по ортогональной системе функций. Многочлен Фурье

## Ортогональная система функций

Пусть есть последовательность функций и для любого – непрерывна на . Система называется ортогональной на , если . По аналогии с ортогональными векторами, для которых условием ортогональности является нулевое скалярное произведение, только в нашем случае роль скалярного произведения выполняет интеграл. Интеграл берется, так как функции непрерывны.

Если в дополнение к предыдущему условию для любого натурального , то такая система функций называется ортонормированной. На .

**Пример.** Система является ортогональной на . .

**Пример.** Система является ортонормированной на . .

**Замечание.** Система является ортонормированной на .

**Замечание.** Система ортогональная на .

**Замечание.** Система ортогональная на .

## Ряд Фурье по ортогональной системе функций

Пусть непрерывна на и – непрерывная на ортогональная система функций. Пусть существуют такие , что .

**Теорема 1.** Если ряд сходится равномерно, то .

**Доказательство.** домножим на . Получаем . Так как ряд сходится равномерно, имеем право проинтегрировать. , откуда следует, что .

называется коэффициентом Фурье функции по ортогональной системе на .

**Пример.** – ортогональная система функций, для которой . – формулы Эйлера-Фурье.

Многочлен Фурье смотри в следующем билете.

# Тригонометрические многочлены и ряды. Формула Фурье-Эйлера. Ядро Дирихле

Ряд вида называется тригонометрическим многочленом – го порядка. При получим тригонометрический ряд.

, откуда получаем . Удобно для сложения двух гармоник в одну со сдвигом фазы.

Получили упрощенную форму тригонометрического ряда .

Пусть есть тригонометрический ряд . Тогда для его имеем .

**Замечание.** Аналогично формулы верны в случае тригонометрического ряда.

## Многочлены Фурье. Формула Фурье-Эйлера

Пусть непрерывна на . По формулам Фурье-Эйлера можно построить коэффициенты . Тогда . Будет ли сопоставленный ряд сходиться к ?

Выражение вида называется многочленом Фурье функции . Тогда для того, чтобы раскладывалась в ряд , необходимо, чтобы при для любого .

Распишем . Оказывается, можно посчитать.

**Лемма.** .

**Доказательство.**

.

**Следствие.** .

**Замечание.** Можно показать, что , т.е. можно сдвигать как угодно влево и вправо. называется ядром Дирихле.

**Лемма.** Пусть – – периодическая функция, тогда .

**Доказательство.** .

Выражение называется ядром Дирихле.

Оценим погрешность. Рассмотрим разность …

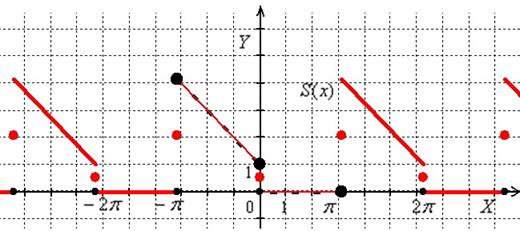
**Лемма.** .

**Доказательство.** .

…Тогда имеем . По этой формуле очень удобно высчитывать погрешность. А итоговой формулой будет – формула Фурье – го порядка.

**Замечание.** Формула имеет более широкое применение, потому что для разложения необходимо лишь существования интегралов, а не производных вплоть до -й.

# Основные теоремы о сходимости рядов Фурье

**Замечание.** Ряд тогда, когда . Будем считать, что – гладкая на , если она непрерывна на этом промежутке вместе со своей производной и и . – кусочно – гладкая на , если этот промежуток можно разбить на конечное число промежутков, на которых гладкая. Можно показать, что у кусочно-гладкой функции особые точки это точки разрыва первого рода.

**Теорема 2.** Пусть – кусочно – гладкая в . Тогда в любой точке этого промежутка ряд Фурье сходится к . В точках разрыва ряд сходится к , а в граничных точках к .

**Теорема 3 (Дирихле).** Пусть имеет конечно число экстремумов на и непрерывна, за исключением точек, в которых может быть разрыв первого рода. Тогда ряд Фурье сходится к , а в точках разрыва к , а в граничных точках к . Эта теорема более сильная, чем предыдущая.

# Свойства коэффициентов Фурье

**Теорема 4.** Пусть такова, что существуют интегралы , причем не обязательно только с разрывами первого рода – это могут быть и несобственные интегралы. Тогда предел и .

**Доказательство.** Рассмотрим , где . Продолжим раскладывать . Теперь рассмотрим члены по-отдельности.

*.*

. Красотень, не правда ли? На самом деле, все интегралы на полном периоде для синусов и косинусов в первой степени будут равны нулю, поэтому выражение примет вид . Так-то лучше.

Подставляем все в исходное выражение: . Это значит, что . Получается, что при любом ряд ограничен сверху, а значит он сходится, то есть общий член стремится к нулю, то есть одновременно при .

**Следствие.** Для любых чисел справедливо неравенство Коши . Пусть . Тогда имеем . – сходящиеся ряды. Следовательно, сходится и ряд . По признаку сравнения сойдется и ряд . Значит, общий член стремится к нулю, .

## Разложение – периодических функций

Пусть непрерывна на и – периодична. Тогда , где .

**Замечание.** Можно интегрировать по любому промежутку длиной .

В случае четной функции относительно центра промежутка .

В случае нечетной функции относительно центра промежутка .

## Разложение – периодических функций

Пусть непрерывна на и – периодична. Преобразуем функцию в – периодическую . Тогда – непрерывна на и – периодична. Выполнив все подстановки, получим .

## Разложение произвольных функций

Пусть удовлетворяет а теореме Дирихле. Тогда в точках непрерывности . Но тогда вне заданного промежутка функция не будет определяться рядом, она будет повторяться периодически.

**Замечание.** Аналогично ведет себя и разложение на промежутке .

# Ряды Фурье в комплексной форме

Пусть непрерывна на . Для действительной переменной справедливо разложение . Рассмотрим комплексный случай . Тогда для . Откуда получаем ряд Фурье в комплексной форме . В результате имеем ряд Фурье в комплексной форме .

# Равномерная сходимость рядов Фурье. Сходимость рядов Фурье «в среднем»

**Теорема 5.** Пусть непрерывна на и имеет кусочно-гладкую производную, и . Тогда ряд Фурье сходится к равномерно.

**Доказательство.** Рассмотрим , где – коэффициент Фурье для . Аналогично можно вывести . По следствию из теоремы 4 ряды сходятся, а следовательно сходятся и ряды , а вместе с ними и ряд .Тогда для разложения Фурье имеем . По признаку Вейерштрасса ряд Фурье сходится абсолютно и равномерно.

## Сходимость «в среднем»

Пусть – функции, заданные на и интегрируемы на нем вместе со своими квадратами. Рассмотрим как приближение , при этом отклонением будет . Охарактеризовать это отклонение можно следующими способами:

1)

2) по порядку малости при .

3) – среднеквадратичное отклонение (квадраты площадей отклонений). Оно обобщает и дискретный случай .

Задача приближения в среднем: для – найти такое в некотором классе функций, чтобы среднеквадратичное отклонение было минимальным.

**Теорема 6.** Среди тригонометрических многочленов – го порядка наилучшим приближением данной функции в смысле среднего квадратичного на является многочлен Фурье данной функции, т.е. минимально тогда, когда .

**Доказательство.** Пусть . Рассмотрим . Для вывода этого выражения использовались те же преобразования, что и в теореме 4. Имеем , где . Нетрудно заметить, что , при этом будет минимально при минимальном значении , т.е. тогда, когда . Тогда выражение примет вид .

# Равенство Парсеваля

**Теорема 7 (Парсеваля).** Пусть – непрерывна и имеет кусочно-гладкую производную на и . Тогда имеет место равенство .

**Доказательство.** Рассмотрим выведенное выражение . Мы знаем, что равномерно. Это значит, что для любого существует такое , что для любого и для любого выполняется . Тогда выражение представить в виде , откуда следует , что соответствует . Тогда имеем при , откуда и следует требуемое равенство.

# Преобразования Фурье

Пусть определена на и абсолютно интегрируема на этом интервале, т.е. . И пусть она раскладывается в ряд Фурье на любом промежутке (удовлетворяет теореме Дирихле или предшествующей ей), т.е. в точках непрерывности . Тогда можно представить в виде . Узнаем, к чему сойдется ряд при . Для этого рассмотрим и . Без доказательства скажем, что последнее выражение стремится к при . Последний интеграл называется двойным интегралом Фурье. В результате имеем, что в точках непрерывности при , а в точках разрыва выражение стремится к . Используя коитус разности, получим другую формулу интеграла Фурье: . Ее также записывают в виде . Таким образом, мы получили удобный вид формулы для разложения функции любого вида в ряд Фурье, где . Для четной функции поимеем разложение по косинусам: , для нечетной поимеем разложение по синусам: .

Рассмотрим также функцию, которую будем называть производящей – косинус – преобразование Фурье, аналог . Обратно восстанавливается как . Аналогичным образом определяется синус – преобразование .

# Комплексная форма интеграла Фурье

Рассмотрим , где , причем . Применим это к любому интегралу, например: , откуда имеем , где . Мы получили интеграл Фурье в комплексной форме.